

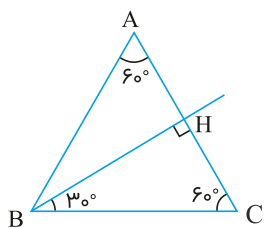


گزینه ۱

۱

روش اول: از آنجا که $BA = BC$ و هر نقطه روی عمودمنصف از دو سر پاره خط به یک فاصله است پس نقطه B روی عمودمنصف AC قرار دارد. همچنین در مثلث متساوی الاضلاع ABC داریم: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ دو مثلث ایجاد شده همنهشت هستند بنابراین زاویه برخورد عمودمنصف با قاعده برابر زاویه $\hat{HBC}$ و برابر 30° است.

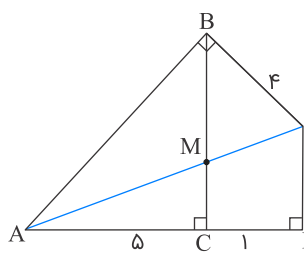
روش دوم: در مثلث متساوی الاضلاع عمودمنصف و نیمساز برهم منطبق اند. از آنجا که $B = 60^\circ$ ، بنابراین عمودمنصف BH ضلع BC را در رأس B و با زاویه 30° قطع می کند.



گزینه ۲

۲

چون D روی نیمساز است، هر نقطه از آن از دو ضلع مجاور به یک فاصله است، پس $BD = DH = 4$ می شود. در مثلث ADH داریم:



$$\frac{MC}{DH} = \frac{AC}{AH} \Rightarrow \frac{MC}{4} = \frac{5}{6} \Rightarrow MC = \frac{10}{3}$$

از طرفی MC هم به طور مشابه با فاصله M از ضلع AB برابر است، پس جواب $\frac{10}{3}$ می شود.

باتوجه به اینکه نقطه M روی نیمساز قرار دارد، $AM = BM$. برای به دست آوردن طول BM ، ابتدا مختصات نقطه M را به دست آوریم.

$$3y = x \xrightarrow{x=3} 3y = 3 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow M(3, 1)$$

حال فاصله نقطه $B(3, 0)$ و $M(3, 1)$ را به دست آوریم؛ پس داریم:

$$BM = \sqrt{(3-3)^2 + (1-0)^2} = 1 \Rightarrow BM = AM = 1$$

چون دو مثلث متشابه هستند، پس نسبت محیط آن‌ها برابر نسبت تشابه است.

$$\text{نسبت تشابه} = k = \text{نسبت محیط‌ها} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

می‌توان نوشت:

$$\frac{12}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 24$$

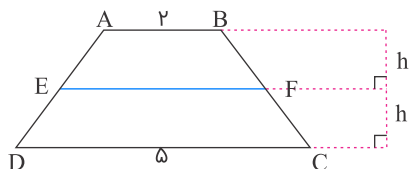
یعنی ضلع متوسط در مثلث دوم برابر ۲۴ است.

دو مثلث ABC و ADE اضلاع متناسب دارند:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AD} = \frac{3}{6}, \frac{AC}{AE} = \frac{2}{4} &\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE &\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \left(\frac{AB}{AD}\right)^2 = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{BCDE}} = \frac{1}{3} &\Rightarrow S_{BCDE} = 3S_{ABC} \end{aligned}$$

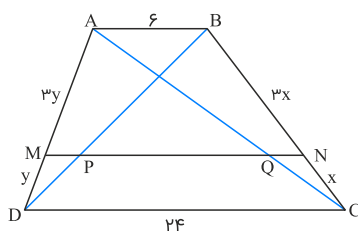
می‌دانیم در دوزنقه طول خط واصل وسط‌های دو ساق میانگین دو قاعده است، پس:

$$EF = \frac{AB + CD}{2} = \frac{7}{2}$$



$$\frac{S_{ABFE}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}(AB + EF)h}{\frac{1}{2}(AB + CD)2h} = \frac{2 + \frac{7}{2}}{2(2 + 5)} = \frac{\frac{11}{2}}{14} = \frac{11}{28}$$

باتوجه به فرض سؤال نتیجه می‌گیریم که $MN \parallel AB \parallel CD$ ، بنابراین داریم:



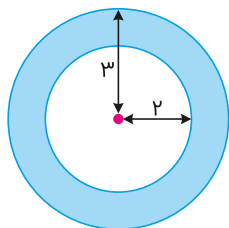
$$\triangle BDC : PN \parallel DC \Rightarrow \frac{PN}{DC} = \frac{BN}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{PN}{24} = \frac{3}{4} \Rightarrow PN = 18$$

$$\triangle ABC : QN \parallel AB \Rightarrow \frac{QN}{AB} = \frac{NC}{BC} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{QN}{6} = \frac{1}{4} \Rightarrow QN = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow PQ = PN - QN = 18 - \frac{3}{2} = \frac{33}{2}$$

$$S = 9\pi = \pi r^2 \Rightarrow r = 3$$

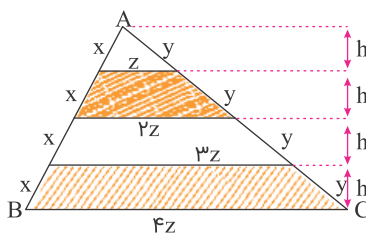
شعاع دایره ۳ سانتی‌متر است.



قسمت رنگی نقاطی از دایره را مشخص می‌کند که فاصله این نقاط از مرکز دایره بیش از ۲ سانتی‌متر باشد.

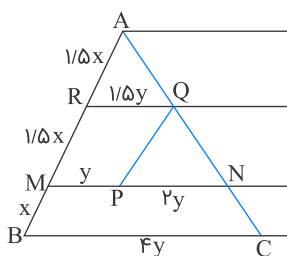
$$\text{مساحت قسمت رنگی} : \pi(3)^2 - \pi(2)^2 = 5\pi$$

طول تمام پاره‌خطها را پارامتری می‌نویسیم:



$$\left. \begin{aligned} \text{مساحت دوزنقه بزرگ} &= \frac{(3z + 4z) \times h}{2} = \frac{7zh}{2} \\ \text{مساحت دوزنقه کوچک} &= \frac{(z + 2z) \times h}{2} = \frac{3zh}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{نسبت} = \frac{7}{3}$$

از Q خطی موازی MN رسم می‌کنیم تا AM را در R قطع کند. حال باتوجه به نسبت‌های تالس در دو مثلث ABC و AMN، می‌توان ابعاد را به‌طور نسبی مشخص کرد.

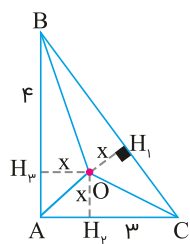


$$\begin{aligned} \frac{AR}{AM} &= \frac{RQ}{MN} = \frac{1}{2} \\ \frac{AR}{AB} &= \frac{RQ}{BC} = \frac{1/5}{4} \end{aligned}$$

حال نسبت خواسته‌شده را می‌نویسیم:

$$\frac{S_{\triangle PQN}}{S_{MNCB}} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}h \times 2a}{\frac{1}{2} \times 4y \times h} = \frac{3}{7}$$

نقطه برخورد نیمسازهای مثلث از سه ضلع آن به یک فاصله است، پس:



$$OH_1 = OH_2 = OH_3 = x$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OAB}$$

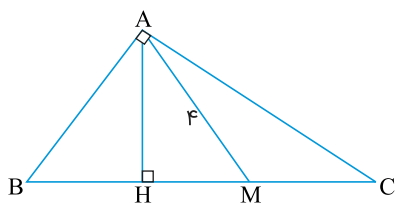
$$\frac{3 \times 4}{2} = \frac{x \times 5}{2} + \frac{x \times 3}{2} + \frac{x \times 4}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2} 12 = 12x \Rightarrow x = 1$$

با تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{MB}{NC} \Rightarrow \frac{AD}{MB} = \frac{AE}{NC} \Rightarrow \frac{2/5}{5} = \frac{3}{NC} \Rightarrow NC = \frac{3 \times 5}{2/5} = 6$$

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه اندازه میانه وارد بر وتر نصف اندازه وتر است:



$$BC = ۲AM = ۲ \times ۴ = ۸$$

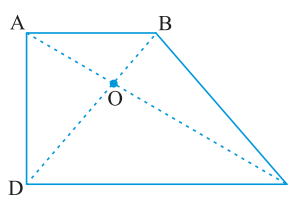
از طرف دیگر، چون $\hat{B} - \hat{C} = ۶۰^\circ$ و $\hat{B} + \hat{C} = ۹۰^\circ$ پس $\hat{B} = ۷۵^\circ$ و $\hat{C} = ۱۵^\circ$.
یعنی در این مثلث اندازه ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{۴}$ اندازه وتر است:

$$AH = \frac{1}{۴}BC = \frac{1}{۴} \times ۸ = ۲$$

اکنون به سادگی می‌توان مساحت مثلث را به دست آورد:

$$S = \frac{1}{۲} \times BC \times AH = \frac{1}{۲} \times ۸ \times ۲ = ۸$$

دو مثلث AOB و AOD ارتفاع مشترک دارند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها با نسبت قاعده‌هایشان برابر است:

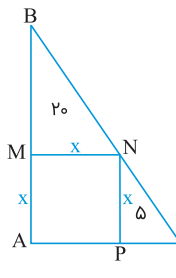


$$\frac{S_{AOB}}{S_{AOD}} = \frac{BO}{OD} \Rightarrow \frac{۲}{۵} = \frac{BO}{OD}$$

دو مثلث AOB و COD زاویه‌های برابر دارند پس متشابه‌اند و نسبت مساحت‌های آن‌ها مجذور نسبت اضلاع است.
بنابراین:

$$\triangle AOB \sim \triangle COD \Rightarrow \left(\frac{BO}{OD}\right)^۲ = \frac{S_{AOB}}{S_{COD}} \Rightarrow \frac{۴}{۲۵} = \frac{۲}{S_{COD}} \Rightarrow S_{COD} = ۱۲/۵$$

دو مثلث قائم‌الزاویه BMN و CNP متشابه‌اند و نسبت مساحت‌های آنها مجذور نسبت اضلاع است. اگر ضلع مربع را x فرض کنیم، داریم:



$$\triangle BMN \sim \triangle NPC \Rightarrow \frac{BM}{NP} = \frac{MN}{PC} = \frac{BN}{NC} = \sqrt{\frac{S_{BMN}}{S_{CNP}}}$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{x} = \frac{x}{PC} = \sqrt{\frac{20}{50}} = 2 \Rightarrow BM = 2x$$

$$S_{BMN} = 20 \Rightarrow \frac{BM \cdot MN}{2} = 20 \Rightarrow \frac{2x \cdot x}{2} = 20$$

$$\Rightarrow x^2 = 20 \Rightarrow S_{AMNP} = 20$$

دو مثلث رنگی متشابه‌اند، نسبت مساحت‌ها $\frac{4}{9}$ است، پس نسبت قاعده‌ها $\frac{2}{3}$ خواهد بود. بنابراین اگر قاعده کوچک‌تر ۱۴ باشد، قاعده بزرگ‌تر $21 = \frac{14}{\frac{2}{3}}$ است.

چون $AD \parallel BM$ ، پس دو مثلث AED و MEB متشابه هستند:

$$\frac{AE}{EM} = \frac{AD}{BM} \xrightarrow{AD=BC} \frac{AE}{EM} = \frac{BC}{BM} \quad (1)$$

در مثلث MAB ، $FC \parallel AB$. بنا بر قضیه تالس:

$$\frac{AF}{AM} = \frac{BC}{BM} \xrightarrow{(1)} \frac{AF}{AM} = \frac{AE}{EM}$$

$$\xrightarrow{AM=AE+EM} \frac{AF}{AE+EM} = \frac{AE}{EM}$$

با طرفین وسطین کردن تناسب به دست آمده می توان نوشت:

$$AE^2 + AE \times EM = AF \times EM$$

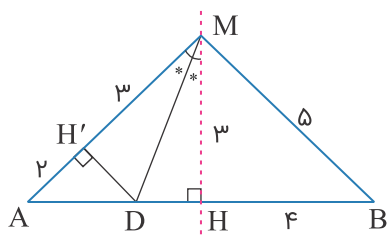
$$AE^2 = AF \times EM - AE \times EM = EM \underbrace{(AF - AE)}_{EF}$$

$$\Rightarrow AE^2 = EM \times EF$$

$$\Delta AHB : MB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

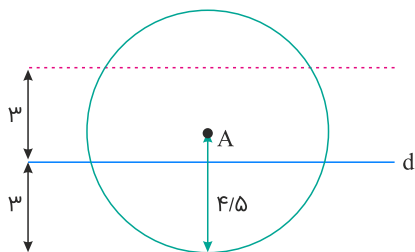
D روی نیمساز $\widehat{AMH}$ است، در نتیجه:

$$DH' = DH \Rightarrow MH = MH' = 3 \Rightarrow AH' = 2$$



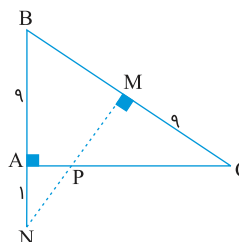
$$\Delta AMH : \tan \hat{A} = \frac{3}{4} \Rightarrow \Delta AH'D : \tan \hat{A} = \frac{H'D}{H'A} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{H'D}{2} \Rightarrow H'D = \frac{3}{2}$$

نقاطی که از خط d به فاصله ۳ باشند، دو خط موازی و به فاصله ۳ از خط d است و نقاطی که از نقطه A به فاصله $\frac{4}{5}$ است برابر دایره‌ای به مرکز A و شعاع $\frac{4}{5}$ است. طبق گفته سؤال فقط ۳ نقطه با این شرایط وجود دارد، پس این دایره بر یکی از خط‌ها مماس و خط دیگری را در دو نقطه قطع خواهد کرد، به‌طوری‌که فاصله نقطه A از خط دورتر برابر با $\frac{4}{5}$ است.



باتوجه به شکل رسم‌شده، فاصله نقطه A از خط d برابر است با:

$$\frac{4}{5} - 3 = 1/5$$



$$\triangle ABC \sim \triangle BMN \Rightarrow \frac{BC}{BN} = \frac{AB}{BM} = \frac{AC}{MN}$$

$$\frac{BM + 9}{10} = \frac{9}{BM} \Rightarrow BM^2 + 9BM = 90 \Rightarrow \begin{cases} BM = 6 \\ BM = -15 \end{cases} \text{ غ ق ق غ}$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$$